Exámenes de Selectividad

Física. Comunidad Valenciana 2024, Ordinaria

mentoor.es

Cuestión 1. Campo Gravitatorio

Define la velocidad de escape de un planeta y deduce su expresión. ¿Cuánto cambia dicha velocidad si se duplica la masa del cuerpo que escapa? Justifica la respuesta.

Solución:

La velocidad de escape de un planeta es la velocidad mínima que debe alcanzar un objeto para escapar de la influencia gravitatoria del planeta sin necesidad de propulsión adicional. Es la velocidad necesaria para que el objeto alcance una energía cinética igual a la energía potencial gravitatoria negativa en la superficie del planeta.

Consideremos un objeto de masa m en la superficie de un planeta de masa M y radio R. La energía potencial gravitatoria E_p del objeto respecto al centro del planeta es:

$$E_p = -\frac{GMm}{R}.$$

La energía cinética E_c necesaria para escapar es:

$$E_c = \frac{1}{2}mv_{\text{esc}}^2.$$

Para que el objeto escape, la energía cinética debe igualar la magnitud de la energía potencial:

$$\frac{1}{2}mv_{\text{esc}}^2 = \frac{GMm}{R}.$$

Simplificando y resolviendo para v_{esc}:

$$v_{\text{esc}}^2 = \frac{2GM}{R} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Por lo tanto, la expresión de la velocidad de escape es:

$$\boldsymbol{v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}}.$$

Impacto de Duplicar la Masa del Cuerpo que Escapa:

Es importante notar que la expresión de la velocidad de escape $v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ no depende de la masa m del cuerpo que intenta escapar. La velocidad de escape depende únicamente de la masa M y el radio R del cuerpo del cual se escapa.

Por lo tanto, si se duplica la masa del cuerpo que escapa, la velocidad de escape del planeta no cambia; permanece igual.

Cuestión 2. Campo Gravitatorio

Un satélite artificial se encuentra a una altura de 500 km sobre la superficie de un planeta. El campo gravitatorio en la superficie del planeta es de 8 m/s^2, ¿cuál es la aceleración de la gravedad a la altura a la que se encuentra el satélite artificial? ¿A qué altura sobre la superficie del planeta el valor de la aceleración de la gravedad se reduce a la mitad del valor en su superficie?

Dato: radio del planeta, $R = 5000$ km

Solución:

Cálculo de la Aceleración de la Gravedad a una Altura de 500 km:

La aceleración de la gravedad a una altura h sobre la superficie de un planeta está dada por la ley de gravitación universal:

$$g(h) = g \cdot \left(\frac{R}{R+h}\right)^2,$$

donde:

- $g = 8\,\mathrm{m/s^2}$ es la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta,
- $R = 5000\,\mathrm{km} = 5{,}000{,}000\,\mathrm{m}$ es el radio del planeta,
- $h = 500\,\mathrm{km} = 500{,}000\,\mathrm{m}$ es la altura del satélite sobre la superficie.

Sustituyendo los valores:

$$g(500\,\mathrm{km}) = 8 \cdot \left(\frac{5{,}000{,}000}{5{,}000{,}000 + 500{,}000}\right)^2 = 8 \cdot \left(\frac{5{,}000{,}000}{5{,}500{,}000}\right)^2 = 6{,}6\,\mathrm{m/s^2}.$$

Por lo tanto, la aceleración de la gravedad a una altura de 500 km es $6{,}6\,\mathrm{m/s^2}$.

Cálculo de la Altura para Reducir la Gravedad a la Mitad:

Queremos encontrar la altura h' tal que:

$$g(h') = \frac{g}{2}.$$

Usando la fórmula de la aceleración de la gravedad a una altura h':

$$\frac{g}{2} = g \cdot \left(\frac{R}{R+h'}\right)^2.$$

Simplificando:

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{R}{R+h'}\right)^2.$$

Tomando la raíz cuadrada en ambos lados:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{R}{R+h'}.$$

Despejando h':

$$R + h' = R \cdot \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad h' = R \cdot (\sqrt{2} - 1).$$

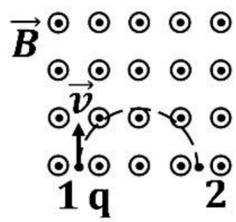
Sustituyendo $R = 5000\,\mathrm{km}$:

$$h' = 5000 \cdot (\sqrt{2} - 1) = 2071\,\mathrm{km}.$$

Por lo tanto, la altura sobre la superficie del planeta donde la aceleración de la gravedad se reduce a la mitad es 2071 km.

Cuestión 3. Campo Electromagnético

La línea discontinua de la figura representa la trayectoria de una carga, q, entre las posiciones 1 y 2 dentro de un campo magnético uniforme $\vec{B}$. Escribe el nombre y la expresión de la fuerza que el campo ejerce sobre dicha carga. Determina razonadamente el signo de la carga. Explica cuál sería la forma de la trayectoria si por el punto 1 entrara un neutrón con velocidad $\vec{v}$.



Solución:

La fuerza que ejerce un campo magnético sobre una carga en movimiento se denomina *fuerza de Lorentz*:

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}),$$

donde:

- q es la carga de la partícula,
- $\vec{v}$ es la velocidad de la partícula,
- $\vec{B}$ es el campo magnético.

Por lo tanto, la fuerza ejercida por el campo magnético sobre la carga q es la fuerza de Lorentz, expresada por $\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$.

Observando la trayectoria de la carga q representada por la línea discontinua, podemos deducir la siguiente información:

- $\vec{F} = F \cdot \vec{i}$ (sentido positivo del eje x),
- $\vec{v} = v \cdot \vec{j}$ (sentido positivo del eje y),
- $\vec{B} = B \cdot \vec{k}$ (sentido positivo del eje z).

Entonces,

$$\vec{F}\vec{i} = |q| \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = |q| vB\vec{i},$$

por lo que la carga debe ser positiva.

Por lo tanto, la carga es positiva..

Un neutrón es una partícula **neutral** ($q = 0$). Dado que la fuerza de Lorentz depende de la carga q, si $q = 0$, entonces:

$$\vec{F} = 0 \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{0}.$$

Por lo tanto, la fuerza magnética sobre un neutrón es nula. Como resultado, la trayectoria del neutrón será una línea recta, ya que no experimenta ninguna fuerza que lo desvíe de su camino.

Cuestión 4. Campo Electromagnético

Un hilo conductor rectilíneo de gran longitud, situado a lo largo del eje X, transporta una corriente de intensidad $I = 50$ A en sentido positivo. Determina las coordenadas de los puntos sobre el eje Y en los que el módulo del vector campo magnético generado sea $B = 10^{-5}$ T. Representa la corriente, las líneas de campo magnético y el vector campo magnético, $\vec{B}$, en dichos puntos. Escribe la expresión vectorial del campo magnético en dichos puntos.

Dato: permeabilidad magnética en el vacío, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ T m/A

Solución:

Consideremos un hilo conductor rectilíneo de gran longitud situado a lo largo del eje X, que transporta una corriente de intensidad $I = 50$ A en sentido positivo. Queremos determinar las coordenadas de los puntos sobre el eje Y donde el módulo del campo magnético generado es $B = 10^{-5}$ T. La expresión para el campo magnético a una distancia r de un hilo conductor rectilíneo es:

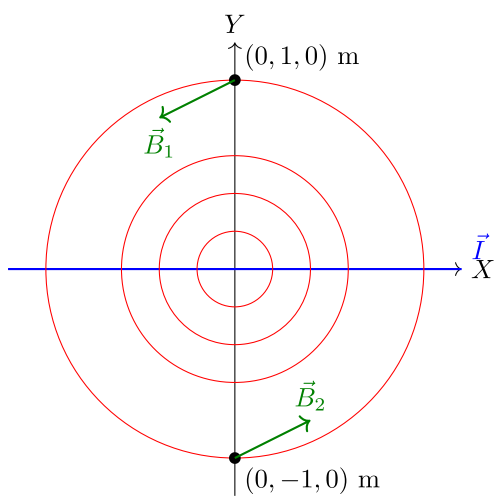
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Dado que $B = 10^{-5}$ T, podemos despejar r:

$$10^{-5} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 50}{2\pi r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{2 \cdot 10^{-7} \cdot 50}{10^{-5}} = 1 \text{ m}.$$

De manera vectorial, se tiene que:

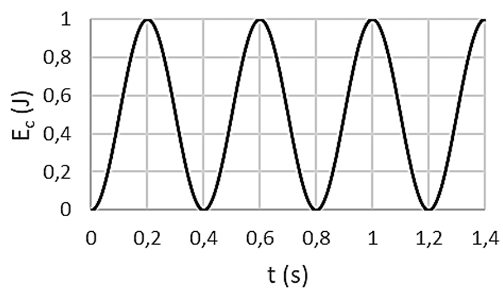
$$\vec{B}_1 = +B\vec{k} = 10^{-5}\vec{k} \text{ T} \qquad \text{y} \qquad \vec{B}_2 = -B\vec{k} = -10^{-5}\vec{k} \text{ T}.$$



Por lo tanto, las coordenadas de los puntos sobre el eje Y son $(0, 1, 0)$ m y $(0, -1, 0)$ m.

Cuestión 5. Ondas

En la gráfica adjunta se muestra la energía cinética en función del tiempo de una partícula con movimiento armónico simple. Deduce razonadamente el valor de la energía mecánica del cuerpo, su energía potencial en el instante $t = 0{,}4$ s, el periodo del movimiento y la frecuencia angular.



Solución:

Sabemos que la energía mecánica es constante en cada punto del movimiento armónico simple. Además, esta viene dada por

$$E_m = E_c + E_p.$$

En la gráfica se observa que la energía cinética máxima es $E_{c,\text{máx}} = 1$ J, y coincide en este caso con la energía mecánica, puesto que en ese mismo momento no hay elongación ($E_p = 0$ J).

Por lo tanto, la energía mecánica es $E_m = 1$ J.

En el instante $t = 0,4$ s, observamos en la gráfica que $E_c = 0$ J. Entonces,

$$E_p = E_m - E_c = 1 - 0 = 1 \text{ J}.$$

Por lo tanto, la energía potencial a los 0,4 s es $E_p = 1$ J.

Sabemos que la energía cinética máxima se da en la posición de equilibrio, y su valor mínimo en los extremos (se anula cada media oscilación). En la gráfica, vemos que la partícula tarda 0,4 s en realizar media oscilación, por lo que el periodo es $T = 0,8$ s.

Por lo tanto, el periodo es $T = 0,8$ s.

La frecuencia angular ω está relacionada con el periodo T mediante la relación:

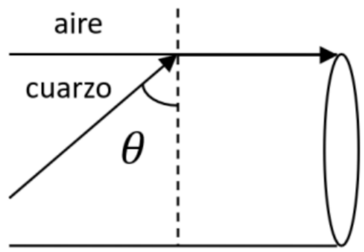
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,8} = \frac{5\pi}{2} \text{ rad/s}.$$

Por lo tanto, la frecuencia angular es $\omega = \frac{5\pi}{2}$ rad/s.

Cuestión 6. Ondas

Un rayo de luz se propaga por una fibra de cuarzo rodeada de aire. Tras incidir sobre la superficie cuarzo-aire con un ángulo $\theta = 41{,}8°$, se propaga paralelamente al eje de la fibra como indica la figura. Explica qué ocurre si el ángulo de incidencia es mayor que 41,8° y nombra el fenómeno. Calcula el índice de refracción del cuarzo.

Dato: índice de refracción del aire, $n_a = 1{,}00$



Solución:

Consideremos un rayo de luz que se propaga dentro de una fibra de cuarzo y que incide sobre la superficie cuarzo-aire con un ángulo de incidencia $\theta = 41{,}8°$. En este caso, el rayo se propaga paralelamente al eje de la fibra, lo que indica que θ es el *ángulo crítico* para la reflexión interna total.

Fenómeno cuando el ángulo de incidencia es mayor que 41,8°:

Cuando el ángulo de incidencia θ es mayor que el ángulo crítico $\theta_c = 41{,}8°$, el rayo de luz no atraviesa la interfaz cuarzo-aire, sino que se refleja completamente dentro del cuarzo. Este fenómeno se conoce como *reflexión interna total*.

Por lo tanto, el ángulo de incidencia θ es mayor que el ángulo crítico $\theta_c = 41{,}8°$, se produce reflexión total interna.

Cálculo del índice de refracción del cuarzo:

El ángulo crítico θ_c se relaciona con los índices de refracción de los dos medios (cuarzo y aire) mediante la siguiente ecuación derivada de la Ley de Snell:

$$\sin\theta_c = \frac{n_a}{n_q},$$

donde n_a es el índice de refracción del aire y n_q es el índice de refracción del cuarzo. Despejando n_q:

$$n_q = \frac{n_a}{\sin\theta_c} = \frac{1}{\sin 41{,}8°} = 1{,}5.$$

Por lo tanto, el índice de refracción del cuarzo es $n_q = 1{,}5$.

Cuestión 7. Física Moderna

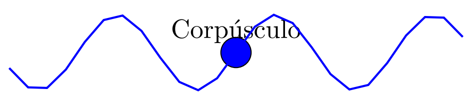
Explica qué es la dualidad onda-corpúsculo y escribe la expresión de la longitud de onda de De Broglie. Calcula la longitud de onda de De Broglie de una espora del hongo *Pilobolus kleinii* que se mueve a una velocidad de 20 m/s, sabiendo que la masa de un millón de esporas es de 1,0 g.

Dato: constante de Planck, $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ J s

Solución:

Dualidad onda-corpúsculo:

La dualidad onda-corpúsculo es un principio fundamental de la mecánica cuántica que establece que todas las partículas exhiben propiedades tanto de partículas (corpúsculos) como de ondas. Este concepto fue propuesto por Louis de Broglie, quien sugirió que partículas con masa, como los electrones, pueden mostrar comportamientos ondulatorios, como la interferencia y la difracción. Esta dualidad es esencial para entender fenómenos como la estructura atómica y las propiedades de los materiales a nivel microscópico.



Expresión de la longitud de onda de De Broglie:

La longitud de onda de De Broglie (λ) para una partícula está dada por la siguiente expresión:

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v},$$

donde:

- λ es la longitud de onda de De Broglie,
- h es la constante de Planck,
- m es la masa de la partícula,
- v es la velocidad de la partícula.

Cálculo de la longitud de onda de De Broglie para una espora:

Dado que la masa de un millón de esporas es de 1,0 g, la masa de una espora individual (m) se calcula de la siguiente manera:

$$m = \frac{1{,}0 \text{ g}}{1{,}000{,}000} = 1{,}0 \cdot 10^{-6} \text{ g} = 1{,}0 \cdot 10^{-9} \text{ kg}.$$

La velocidad (v) de la espora es de 20 m/s. Ahora, aplicamos la fórmula de De Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34} \text{ J s}}{1{,}0 \cdot 10^{-9} \text{ kg} \cdot 20 \text{ m/s}} = 3{,}3 \cdot 10^{-26} \text{ m}.$$

Por lo tanto, la longitud de onda de De Broglie de una espora del hongo *Pilobolus kleinii* que se mueve a una velocidad de 20 m/s es $3{,}3 \cdot 10^{-26}$ m.

Cuestión 8. Física Moderna

Explica brevemente en qué consisten la radiación alfa y la radiación beta y cómo se modifica el núcleo atómico que las emite. Halla razonadamente el número atómico y el número másico del elemento final producido a partir del $^{222}_{86}$Rn, después de que emita una partícula α y a continuación el producto emita una partícula β^-.

Solución:

Radiación alfa (α): Consiste en la **emisión de partículas alfa**, que son núcleos de helio compuestos por 2 protones y 2 neutrones, representados como $^4_2$He. Esta radiación ocurre cuando un núcleo inestable expulsa una partícula alfa para alcanzar una mayor estabilidad. Como resultado, el número atómico del núcleo disminuye en 2 y el número másico en 4 unidades.

Radiación beta (β): Consiste en la **emisión de partículas beta**, que son electrones (β^-) o positrones (β^+). En el caso de la radiación beta negativa (β^-), un neutrón en el núcleo se convierte en un protón y emite un electrón y un antineutrino. Este proceso incrementa el número atómico en 1, mientras que el número másico permanece constante.

Cálculo del número atómico y número másico del elemento final:

La partícula alfa emitida es $^4_2$He. Al emitir una partícula alfa, el núcleo original pierde 2 protones y 2 neutrones:

$$^{222}_{86}\text{Rn} \quad \xrightarrow{\alpha} \quad ^{222-4}_{86-2}\text{Po} + ^4_2\text{He}.$$

Simplificando:

$$^{222}_{86}\text{Rn} \quad \xrightarrow{\alpha} \quad ^{218}_{84}\text{Po} + ^4_2\text{He}.$$

Por lo tanto, el elemento final producido es el astato-218, representado como $^{218}_{85}$At, con un número atómico de 85 y un número másico de 218.

Problema 1. Campo Electromagnético

Dos cargas puntuales, $q_1 = 4$ μC y $q_2 = -2$ μC, se encuentran ubicadas en las coordenadas (0,0) m y (1,0) m respectivamente.

a) **Calcula razonadamente el vector campo eléctrico total en el punto (1, 1) m. Representa gráficamente en dicho punto los vectores campo eléctrico involucrados.**

b) **Razona por qué el campo total sobre puntos del eje X sólo se puede anular cuando $x > 1$ m. Calcula razonadamente el punto en que dicho campo se anula.**

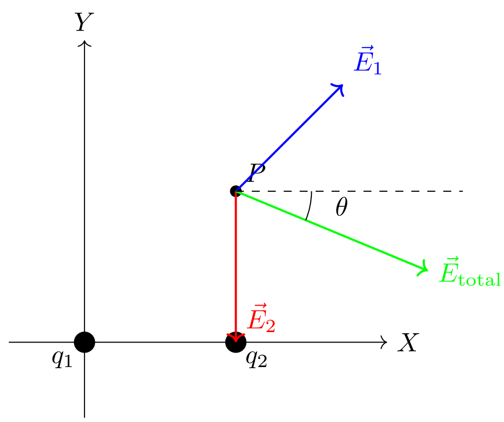
Dato: constante de Coulomb, $k = 9 \cdot 10^9$ N m^2 C^{-2}

Solución:

a) **Calcula razonadamente el vector campo eléctrico total en el punto (1, 1) m. Representa gráficamente en dicho punto los vectores campo eléctrico involucrados.**

Consideramos dos cargas puntuales:
- $q_1 = +4$ μC $= +4 \cdot 10^{-6}$ C ubicada en $(0, 0)$ m.
- $q_2 = -2$ μC $= -2 \cdot 10^{-6}$ C ubicada en $(1, 0)$ m.

Queremos calcular el campo eléctrico total en el punto P de coordenadas $(1, 1)$ m. Primero, calculamos el campo eléctrico producido por cada carga en el punto P.



Campo eléctrico debido a q_1:

La posición relativa del punto P respecto a q_1 es:

$$\vec{r}_{1P} = (1 - 0,\ 1 - 0) = (1,\ 1) \text{ m}.$$

La distancia entre q_1 y P es:

$$r_{1P} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2} \text{ m}.$$

El vector unitario en la dirección de $\vec{r}_{1P}$ es:

$$\vec{r}_{1P} = \frac{\vec{r}_{1P}}{r_{1P}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

El campo eléctrico en P debido a q_1 es:

$$\vec{E}_1 = \frac{kq_1}{r_{1P}^2}\vec{r}_{1P}.$$

Sustituyendo los valores:

$$\vec{E}_1 = \frac{(9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2})(4 \cdot 10^{-6} \text{ C})}{(\sqrt{2})^2}\ \vec{r}_{1P} = \frac{(9 \cdot 10^9) \cdot (4 \cdot 10^{-6})}{2}\ \vec{r}_{1P}.$$

Calculamos:

$$\vec{E}_1 = 18000 \text{ N/C} \cdot \vec{r}_{1P} = 18000 \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ N/C}.$$

<u>Campo eléctrico debido a q_2:</u>

La posición relativa del punto P respecto a q_2 es:

$$\vec{r}_{2P} = (1-1,\, 1-0) = (0,\, 1) \text{ m}.$$

La distancia entre q_2 y P es:

$$r_{2P} = \sqrt{(0)^2 + (1)^2} = 1 \text{ m}.$$

El vector unitario en la dirección de $\vec{r}_{2P}$ es:

$$\vec{r}_{2P} = \frac{\vec{r}_{2P}}{r_{2P}} = (0,\, 1).$$

El campo eléctrico en P debido a q_2 es:

$$\vec{E}_2 = \frac{kq_2}{r_{2P}^2} \vec{r}_{2P}.$$

Sustituyendo los valores:

$$\vec{E}_2 = \frac{(9 \cdot 10^9) \cdot (-2 \cdot 10^{-6})}{1^2}\ \vec{r}_{2P} = -18000 \text{ N/C} \cdot (0,\, 1).$$

Por el principio de superposición, sumamos los campos eléctricos para obtener el campo total en P:

$$\vec{E}_{\text{total}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

Calculamos las componentes:

$$\vec{E}_1 = 18000 \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = (12727.92,\ 12727.92) \text{ N/C},$$

$$\vec{E}_2 = -18000\ (0,\, 1) = (0,\ -18000) \text{ N/C}.$$

Entonces,

$$E_x = 12,727.92 + 0 = 12,727.92 \text{ N/C},$$

$$E_y = 12,727.92 + (-18,000) = -5,272.08 \text{ N/C}.$$

Por lo tanto, el vector campo eléctrico en el punto $(1, 1)$ m es $\vec{E}_{\text{total}} = (12727.92,\ -5272.08)$ N/C.

b) Razona por qué el campo total sobre puntos del eje X sólo se puede anular cuando $x > 1$ m. Calcula razonadamente el punto en que dicho campo se anula.

Los puntos sobre el eje X tienen coordenadas $(x, 0)$. El campo eléctrico total en estos puntos es la suma de los campos debidos a q_1 y q_2. El campo eléctrico debido a q_1 en un punto del eje X es:

$$\vec{E}_1 = \frac{kq_1}{x^2} \vec{i}.$$

El campo eléctrico debido a q_2 es:

$$\vec{E}_2 = \frac{kq_2}{(x-1)^2} \vec{i}.$$

El campo eléctrico total es:

$$\vec{E}_{\text{total}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \left(\frac{kq_1}{x^2} + \frac{kq_2}{(x-1)^2} \right) \vec{i}.$$

Para que el campo eléctrico total se anule, debe cumplirse:

$$\frac{kq_1}{x^2} + \frac{kq_2}{(x-1)^2} = 0.$$

Simplificamos eliminando k:

$$\frac{q_1}{x^2} + \frac{q_2}{(x-1)^2} = 0.$$

Sustituimos los valores de q_1 y q_2:

$$\frac{4 \cdot 10^{-6}}{x^2} + \frac{-2 \cdot 10^{-6}}{(x-1)^2} = 0.$$

Simplificamos multiplicando ambos lados por $x^2(x-1)^2$:

$$4 \cdot 10^{-6}(x-1)^2 - 2 \cdot 10^{-6} x^2 = 0.$$

Eliminamos 10^{-6} multiplicando ambos lados por 10^6:

$$4(x-1)^2 - 2x^2 = 0.$$

Desarrollamos los términos:

$$4(x^2 - 2x + 1) - 2x^2 = 0,$$
$$4x^2 - 8x + 4 - 2x^2 = 0,$$
$$(4x^2 - 2x^2) - 8x + 4 = 0,$$
$$2x^2 - 8x + 4 = 0.$$

Dividimos toda la ecuación entre 2:

$$x^2 - 4x + 2 = 0.$$

Resolvemos la ecuación cuadrática:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2}.$$

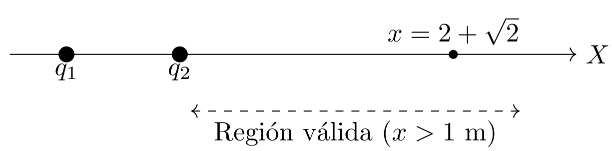
Entonces, las soluciones son:

$$x = 2 + \sqrt{2} \approx 2 + 1.4142 = 3.4142 \text{ m},$$

$$x = 2 - \sqrt{2} \approx 2 - 1.4142 = 0.5858 \text{ m}.$$

La solución $x = 0.5858$ m se encuentra entre las cargas ($0 < x < 1$ m), pero en esta región, los campos eléctricos de ambas cargas tienen la misma dirección (ambas apuntan en la misma dirección), por lo que no pueden cancelarse.
La solución válida es $x = 3.4142$ m, ya que está en $x > 1$ m, donde los campos eléctricos de las cargas tienen direcciones opuestas y pueden anularse.

Por lo tanto, el campo eléctrico total sobre el eje X sólo se anula en $x = 2 + \sqrt{2}$ m, cuando $x > 1$ m.



Problema 2. Ondas

Una ballena azul emite un sonido de frecuencia 25 Hz por agua de mar. Se considera que es una onda armónica y unidimensional que se propaga en el sentido positivo del eje X a una velocidad de 1500 m/s. En $t = 0$ s y $x = 0$ m la función de onda se encuentra en un máximo, de valor 32 μm. Determina:

a) **La longitud de onda y la fase inicial. Escribe la función de onda en unidades del Sistema Internacional. Utiliza la función seno para resolver el problema.**

b) **El valor de la función de onda y la velocidad de vibración de una partícula del medio situada en $x = 300$ m para el instante $t = 1$ s.**

Solución:

a) **La longitud de onda y la fase inicial. Escribe la función de onda en unidades del Sistema Internacional. Utiliza la función seno para resolver el problema.**

Calculamos la longitud de onda λ. Sabemos que:

$$v = f \cdot \lambda.$$

Despejando λ:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1500 \text{ m/s}}{25 \text{ Hz}} = 60 \text{ m}.$$

Calculamos el número de onda k:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{60 \text{ m}} = \frac{\pi}{30} \text{ m}^{-1}.$$

Calculamos la frecuencia angular ω:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 25 \text{ Hz} = 50\pi \text{ rad/s}.$$

Determinamos la fase inicial ϕ_0. La ecuación de la onda armónica unidimensional es:

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \phi_0).$$

En $t = 0$ s y $x = 0$ m:

$$y(0,0) = A\sin(\phi_0) = A \cdot \sin(\phi_0) = A_{\text{máx}} = A.$$

Como $y(0,0) = A$, entonces:

$$\sin(\phi_0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Tomamos $\phi_0 = \dfrac{\pi}{2}$ para simplificar.

Por lo tanto, la longitud de onda es 60 m, la fase inicial es $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$ rad, y la función de onda es:

$$\boldsymbol{y(x,t) = 32 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{30}\, x - 50\pi\, t + \frac{\pi}{2}\right).}$$

b) **El valor de la función de onda y la velocidad de vibración de una partícula del medio situada en $x = 300$ m para el instante $t = 1$ s.**

Calculamos el valor de la función de onda en $x = 300$ m y $t = 1$ s:

$$y(300 \text{ m},\ 1 \text{ s}) = 32 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot 1 = 32 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 32\ \mu\text{m}.$$

La velocidad de vibración es la derivada parcial de $y(x,t)$ respecto al tiempo:

$$v(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega\cos(kx - \omega t + \phi_0).$$

Sustituyendo los valores:

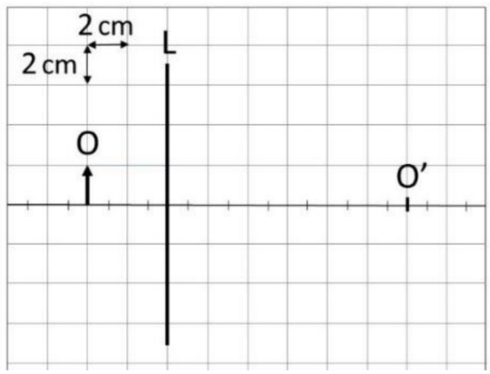
$$v(300 \text{ m},\ 1 \text{ s}) = -32 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot 50\pi \text{ rad/s} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ m/s}.$$

Por lo tanto, en $x = 300$ m y $t = 1$ s, la función de onda vale 32 μm y la velocidad de vibración de la partícula es 0 m/s.

Problema 3. Óptica

En la figura se representa una lente delgada L, un objeto O y la posición de la imagen O' que se produce.

a) **Calcula la potencia de la lente, la distancia focal y razona si la lente es convergente o divergente.**
b) **Realiza un trazado de rayos y razona las características de la imagen. Calcula numéricamente su tamaño.**



Solución:

a) **Calcula la potencia de la lente, la distancia focal y razona si la lente es convergente o divergente.**

En la figura se ve:
- Distancia del objeto a la lente: $s = -4$ cm.
- Distancia de la imagen a la lente: $s' = 12$ cm.
- Altura del objeto: $y = 2$ cm.

Utilizamos la ecuación de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s}.$$

Sustituimos los valores:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{12 \text{ cm}} - \frac{1}{-4 \text{ cm}} = \frac{1}{3 \text{ cm}} \quad \Rightarrow \quad f' = 3 \text{ cm}.$$

La potencia de la lente es:

$$P = \frac{1}{f'} = \frac{1}{0,03 \text{ m}} = 33,33 \text{ dioptrías}.$$

Por lo tanto, la distancia focal de la lente es $f' = 3$ cm y su potencia es $P = -16.67$ dioptrías. Al tener una distancia focal positiva, la lente es convergente.

b) **Realiza un trazado de rayos y razona las características de la imagen. Calcula numéricamente su tamaño.**

Calculamos el aumento lateral (magnificación):

$$m = \frac{s'}{s} = \frac{12 \text{ cm}}{-4 \text{ cm}} = -3.$$

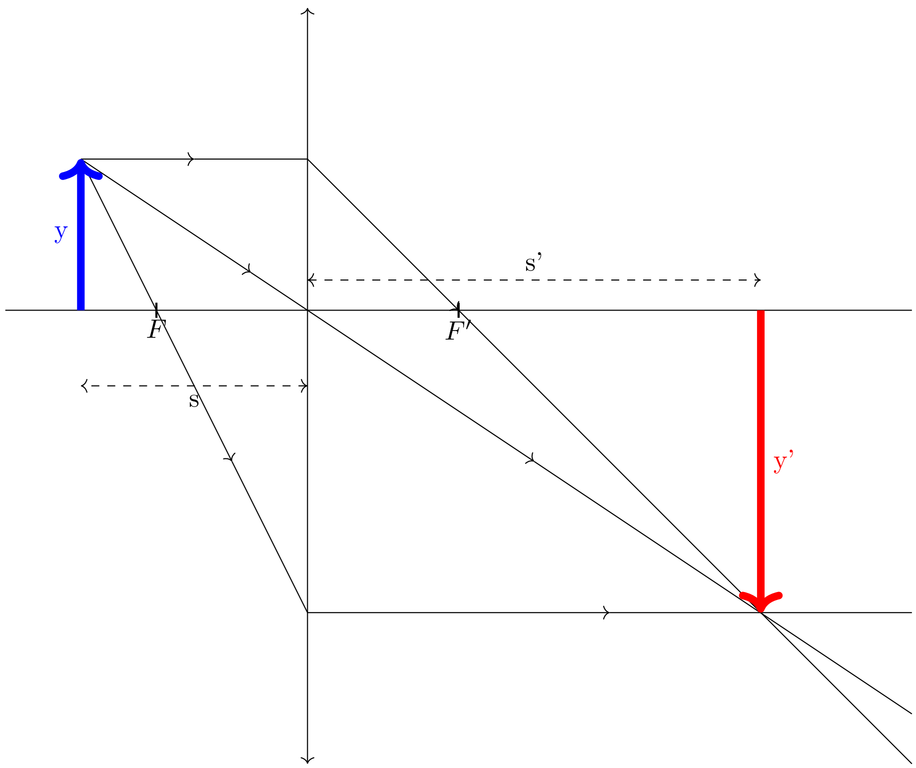
Esto significa que la imagen es:

- *Real*, porque s' es positivo.
- *Invertida*, porque m es negativo.
- *Ampliada*, porque $|m| > 1$.

Calculamos la altura de la imagen y':

$$y' = m \cdot y = -3 \cdot 2 \text{ cm} = -6 \text{ cm}.$$

La imagen mide 6 cm de altura y está invertida. Entonces, el trazado de rayos es:



Por lo tanto, la imagen es real, invertida y más grande que el objeto, con una altura de 6 cm.

Problema 4. Física Moderna

Los muones son partículas elementales, con carga eléctrica negativa, que se forman en las partes altas de la atmósfera y se mueven a velocidades relativistas hacia la superficie de la Tierra. Un muon se forma a 9000 m de altura sobre la superficie de la Tierra y desciende verticalmente con una velocidad $v = 0{,}9978\,c$. Calcula razonadamente:

a) **La energía en reposo y la energía total del muon en electronvoltios.**
b) **El intervalo de tiempo que tarda dicho muon en alcanzar la superficie, medido en un sistema de referencia ligado a la Tierra y medido en un sistema de referencia que viaje con el muon.**

Dato: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s; masa (en reposo) del muon, $m = 1{,}8 \cdot 10^{-28}$ kg; carga elemental, $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C

Solución:

a) **La energía en reposo y la energía total del muon en electronvoltios.**

Los datos son:
- Velocidad del muon: $v = 0{,}9978\,c$.
- Masa en reposo del muon: $m = 1{,}8 \cdot 10^{-28}$ kg.
- Velocidad de la luz: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

La energía en reposo se calcula mediante la fórmula:

$$E_0 = m \cdot c^2.$$

Sustituyendo los valores:

$$E_0 = (1{,}8 \cdot 10^{-28} \text{ kg}) \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = 1{,}62 \cdot 10^{-11} \text{ J}.$$

Convertimos la energía en electronvoltios (1 eV $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J):

$$E_0 = \frac{1{,}62 \cdot 10^{-11} \text{ J}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}} = 1{,}0125 \cdot 10^8 \text{ eV} = 101{,}25 \text{ MeV}.$$

Para calcular la energía total del muon E, primero, calculamos el factor de Lorentz (γ):

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0{,}9978)^2}} = 15{,}0696.$$

La energía total es:

$$E = \gamma \cdot m \cdot c^2 = \gamma \cdot E_0 = 15{,}0696 \cdot 1{,}62 \cdot 10^{-11} \text{ J} = 2{,}44 \cdot 10^{-10} \text{ J}.$$

Convertimos a electronvoltios:

$$E = \frac{2{,}44 \cdot 10^{-10} \text{ J}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}} = 1{,}525 \cdot 10^9 \text{ eV} = 1{,}525 \text{ GeV}.$$

Por lo tanto, la energía en reposo del muon es 101,25 MeV y la energía total es 1,525 GeV.

b) **El intervalo de tiempo que tarda dicho muon en alcanzar la superficie, medido en un sistema de referencia ligado a la Tierra y medido en un sistema de referencia que viaje con el muon.**

El tiempo que tarda el muon en alcanzar la superficie desde la altura $L = 9000$ m es:

$$t_{\text{Tierra}} = \frac{L}{v} = \frac{9000 \text{ m}}{0{,}9978 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 3{,}0066 \cdot 10^{-5} \text{ s} = 30{,}066\ \mu\text{s}.$$

Debido a la dilatación temporal, el tiempo propio del muon es:

$$t_{\text{muon}} = \frac{t_{\text{Tierra}}}{\gamma} = \frac{3{,}0066 \cdot 10^{-5} \text{ s}}{15{,}0696} = 1{,}996 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 1{,}996\ \mu\text{s}.$$

La contracción de longitud establece que:

$$L' = \frac{L}{\gamma} = \frac{9000 \text{ m}}{15{,}0696} = 597{,}48 \text{ m}.$$

El tiempo en el sistema del muon es:

$$t_{\text{muon}} = \frac{L'}{v} = \frac{597{,}48 \text{ m}}{0{,}9978 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 1{,}996 \cdot 10^{-6} \text{ s}.$$

Por lo tanto, el muon tarda 30,066 μs en alcanzar la superficie según la Tierra y 1,996 μs según su propio sistema de referencia.